

1. (i) $y' + g(x) \cdot y = h(x)$, gdje su g i h funkcije i $y' := \frac{dy}{dx}$.
Ako je h nula funkcija jednadžba je homogena: $y' + g(x) \cdot y = 0$, inače je nehomogena.
- (ii) Nelinearna je a), ostale su linearne.
 b) je homogena, a i c) i d) su nehomogene.
- (iii) Iz $y = 2e^{-kx}$ deriviranjem dobijemo $y' = -2ke^{-kx}$.
Sad je $y' + ky = -2ke^{-kx} + k \cdot 2e^{-kx} = 0$, pa je $y = 2e^{-kx}$ rješenje diferencijalne jednadžbe.
2. (i) $F(x, y, y') = 0$ i $y(0) = y_0$, gdje je F neka funkcija triju varijabla.
- (ii) Iz $y' = ky$ dobijemo redom:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{y} &= k dx \\ \ln |y| &= kx + \ln |C|, \quad C \neq 0 \\ |y| &= |C|e^{kx} \\ y &= Ce^{kx}\end{aligned}$$

za $C \in \mathbb{R}$ jer je $y = 0$ također rješenje.

Sad iz $y(0) = A$ dobijemo $C \cdot e^{k \cdot 0} = A$, tj. $C = A$ pa je rješenje Cauchyjevog problema

$$y = Ae^{kx}.$$

- (iii) Za $k > 0$ to je diferencijalna jednadžba rasta ili razmnožavanja (bez ograničenja), a za $k < 0$ to je diferencijalna jednadžba raspada (radioaktivnog i sl.).
3. (i) $y'' + py' + q \cdot y = 0$, gdje su p, q realni brojevi.
- (ii) $r^2 + pr + q = 0$. Jednadžba može imati dva različita realna rješenja, dvostruko rješenje ili dva kompleksno konjugirana rješenja.
- (iii) Ako je $r_1 \neq r_2$ i rješenja karakteristične jednadžbe su realna, onda je $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ za $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ po volji.
Ako je $r_1 = r_2 = r$ onda je $y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$ za $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Ako je $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ i $\beta \neq 0$ onda je $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$ za $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
4. (i) $y(t)$ je koordinata položaja u vremenu t čestice koja titra.
 $y'(t)$ je brzina $v(t)$ te čestice u vrijeme t .
 $y''(t)$ je akceleracija $a(t)$ te čestice u vrijeme t .
 ω je kutna brzina, A je amplituda.
Uvjet $y(0) = A$ znači da je za $t = 0$ čestica u točki $(0, A)$ na y -osi.
 $y'(0) = 0$ znači da je brzina te čestice za $t = 0$ jednaka nuli.
- (ii) Pogledajte lekciju 13.
5. (i)

$$\begin{aligned}y &= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \\ y' &= -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t \\ y'' &= -C_1 \omega^2 \cos \omega t - C_2 \omega^2 \sin \omega t\end{aligned}$$

$$y'' + \omega^2 y = -C_1 \omega^2 \cos \omega t - C_2 \omega^2 \sin \omega t + \omega^2 (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) = 0$$

(ii)

$$\begin{aligned}y &= \frac{a}{2} t^2 + C_1 t + C_2 \\ y' &= at + C_1 \\ y'' &= a\end{aligned}$$

Gotovo.

- (iii) Diferenciramo $x^2 + y^2 = C$ i dobijemo $2x dx + 2y dy = 0$ jer je $dC = 0$.
Oдавдје dobijemo $x dx + y dy = 0$.